Espacios de Hilbert

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,z)+\varphi(y,z); \quad \varphi(x,\mu y+z)=\overline{\mu}\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$$

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,z)+\varphi(y,z); \quad \varphi(x,\mu y+z)=\overline{\mu}\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$$

En el caso de que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z); \quad \varphi(x, \mu y + z) = \overline{\mu} \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$$

En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Una forma sesquilineal queda determinada de manera única por el conocimiento de su parte real.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X\times X\to\mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,z)+\varphi(y,z);\quad \varphi(x,\mu y+z)=\overline{\mu}\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$$

En el caso de que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Una forma sesquilineal queda determinada de manera única por el conocimiento de su parte real.Esto es evidente si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, y en el caso complejo se tiene que:

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Im}\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}(-i\varphi(x,y))=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}\varphi(x,iy) \tag{1}$$

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z); \quad \varphi(x, \mu y + z) = \overline{\mu}\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$$

En el caso de que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Una forma sesquilineal queda determinada de manera única por el conocimiento de su parte real.Esto es evidente si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, y en el caso complejo se tiene que:

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Im}\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}(-i\varphi(x,y))=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}\varphi(x,iy) \tag{1}$$

Observa que en el caso complejo $\operatorname{Re}\varphi(x,y)$ es una forma bilineal sobre el espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$ subyacente a X.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,z)+\varphi(y,z); \quad \varphi(x,\mu y+z)=\overline{\mu}\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$$

En el caso de que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Una forma sesquilineal queda determinada de manera única por el conocimiento de su parte real.Esto es evidente si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, y en el caso complejo se tiene que:

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Im}\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}(-i\varphi(x,y))=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}\varphi(x,iy) \tag{1}$$

Observa que en el caso complejo $\operatorname{Re}\varphi(x,y)$ es una forma bilineal sobre el espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$ subyacente a X.

Una forma sesquilineal se dice que es **hermítica** si $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$ para todos $x,y\in X$. En el caso real esto es tanto como decir que φ es una forma bilineal simétrica.

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \qquad (x \in X) \tag{2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \widehat{\varphi}(x)$.

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \qquad (x \in X) \tag{2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \widehat{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en el caso complejo, la forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ determina de manera única a la forma sesquilineal φ. Y, en el caso real, una forma sesquilineal hermítica queda determinada por su forma cuadrática asociada.

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \qquad (x \in X) \tag{2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \widehat{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en el caso complejo, la forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ determina de manera única a la forma sesquilineal φ. Y, en el caso real, una forma sesquilineal hermítica queda determinada por su forma cuadrática asociada.

Identidad de polarización. Sea φ una forma sesquilineal sobre un espacio vectorial complejo. Se verifica que:

$$4\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) + i\widehat{\varphi}(x+iy) - i\widehat{\varphi}(x-iy)$$

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \qquad (x \in X) \tag{2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \widehat{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en el caso complejo, la forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ determina de manera única a la forma sesquilineal φ. Y, en el caso real, una forma sesquilineal hermítica queda determinada por su forma cuadrática asociada.

Identidad de polarización. Sea φ una forma sesquilineal sobre un espacio vectorial complejo. Se verifica que:

$$4\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) + i\widehat{\varphi}(x+iy) - i\widehat{\varphi}(x-iy)$$

Si φ es hermítica se tiene que

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) \qquad (x,y \in X) \tag{3}$$

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \qquad (x \in X) \tag{2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \widehat{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en el caso complejo, la forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ determina de manera única a la forma sesquilineal φ. Y, en el caso real, una forma sesquilineal hermítica queda determinada por su forma cuadrática asociada.

Identidad de polarización. Sea φ una forma sesquilineal sobre un espacio vectorial complejo. Se verifica que:

$$4\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) + i\,\widehat{\varphi}(x+iy) - i\,\widehat{\varphi}(x-iy)$$

Si φ es hermítica se tiene que

$$4\operatorname{Re}\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) \qquad (x,y \in X) \tag{3}$$

Además, en el caso complejo, se verifica que φ es hermítica si, y sólo si, su forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ toma valores reales.

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar.

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar.

Las propiedades que definen a un producto escalar son, pues, las siguientes:

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar.

Las propiedades que definen a un producto escalar son, pues, las siguientes:
• $(\lambda x + y \mid z) = \lambda(x \mid z) + (y \mid z)$ para todos $x,y,z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar.

Las propiedades que definen a un producto escalar son, pues, las siguientes:
• $(\lambda x + y \mid z) = \lambda(x \mid z) + (y \mid z)$ para todos $x,y,z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.
• $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$ para todos $x,y \in X$.

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar.

Las propiedades que definen a un producto escalar son, pues, las siguientes:
- $(\lambda x + y \mid z) = \lambda(x \mid z) + (y \mid z)$ para todos $x,y,z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$ para todos $x,y \in X$.
- $(x \mid x) > 0$ para todo $x \in X$ con $x \neq 0$.

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:

a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:

a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:

a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar.

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:
a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar.En tal caso, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz equivale a que los vectores x,y sean linealmente dependientes; y la igualdad en la desigualdad de Minkowski equivale a que uno sea múltiplo positivo del otro.

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:
a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar.En tal caso, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz equivale a que los vectores x,y sean linealmente dependientes; y la igualdad en la desigualdad de Minkowski equivale a que uno sea múltiplo positivo del otro.

Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial $\mathcal{H}$ en el que se tiene definido un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$.

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:

a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar.En tal caso, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz equivale a que los vectores x,y sean linealmente dependientes; y la igualdad en la desigualdad de Minkowski equivale a que uno sea múltiplo positivo del otro.

Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial $\mathcal{H}$ en el que se tiene definido un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$.Un espacio prehilbertiano se considera siempre como espacio normado con la norma dada por

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} \qquad (x \in X)$$

Proposición. Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:
a) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

b) **Desigualdad de Minkowski**

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y \in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar.En tal caso, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz equivale a que los vectores x,y sean linealmente dependientes; y la igualdad en la desigualdad de Minkowski equivale a que uno sea múltiplo positivo del otro.

Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial $\mathcal{H}$ en el que se tiene definido un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$.Un espacio prehilbertiano se considera siempre como espacio normado con la norma dada por

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} \qquad (x \in X)$$

Un **espacio de Hilbert** es un espacio prehilbertiano cuya norma es completa.

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

Podemos escribir ahora algunas de las igualdades antes obtenidas para el caso de un producto escalar usando la norma. En particular tenemos que

$$4 \operatorname{Re}(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \tag{4}$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

Podemos escribir ahora algunas de las igualdades antes obtenidas para el caso de un producto escalar usando la norma. En particular tenemos que

$$4\,\mathrm{Re}(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{4}$$

y

$$4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 \tag{5}$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

Podemos escribir ahora algunas de las igualdades antes obtenidas para el caso de un producto escalar usando la norma. En particular tenemos que

$$4 \operatorname{Re}(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{4}$$

y

$$4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 \tag{5}$$

Igualdades que nos dicen que el producto escalar queda determinado por la norma.

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$.

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

Podemos escribir ahora algunas de las igualdades antes obtenidas para el caso de un producto escalar usando la norma. En particular tenemos que

$$4 \operatorname{Re}(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \tag{4}$$

y

$$4(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2 \tag{5}$$

Igualdades que nos dicen que el producto escalar queda determinado por la norma.En consecuencia, un isomorfismo isométrico entre espacios prehilbertianos conserva el producto escalar.

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.Es una identidad en la que no interviene el producto escalar y que debe cumplir cualquier norma que proceda de un producto escalar, pero lo sorprendente es que dicha condición necesaria es también suficiente, es decir, la identidad del paralelogramo caracteriza las normas que proceden de un producto escalar.

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.Es una identidad en la que no interviene el producto escalar y que debe cumplir cualquier norma que proceda de un producto escalar, pero lo sorprendente es que dicha condición necesaria es también suficiente, es decir, la identidad del paralelogramo caracteriza las normas que proceden de un producto escalar.

Teorema de Jordan–von Neumann. Sea $\| \; \|$ una norma en un espacio vectorial X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.Es una identidad en la que no interviene el producto escalar y que debe cumplir cualquier norma que proceda de un producto escalar, pero lo sorprendente es que dicha condición necesaria es también suficiente, es decir, la identidad del paralelogramo caracteriza las normas que proceden de un producto escalar.

Teorema de Jordan–von Neumann. Sea $\| \ \|$ una norma en un espacio vectorial X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) Existe un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x \mid x)$ para todo $x \in X$.

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y) \tag{6}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{7}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.Es una identidad en la que no interviene el producto escalar y que debe cumplir cualquier norma que proceda de un producto escalar, pero lo sorprendente es que dicha condición necesaria es también suficiente, es decir, la identidad del paralelogramo caracteriza las normas que proceden de un producto escalar.

Teorema de Jordan–von Neumann. Sea $\| \ \|$ una norma en un espacio vectorial X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) Existe un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x \mid x)$ para todo $x \in X$.
(ii) Se verifica la igualdad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios ℓ_p^N, ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert, y tampoco lo son los espacios c y c_0.

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios ℓ_p^N, ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert, y tampoco lo son los espacios c y c_0.

La gran utilidad de los espacios de Hilbert se debe al hecho de que en ellos los problemas de *"aproximación óptima"* en los que se trata de obtener la mejor aproximación de un elemento $x \in \mathcal{H}$ por elementos de un conjunto $M \subset \mathcal{H}$ tienen una sencilla solución.

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios ℓ_p^N, ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert, y tampoco lo son los espacios c y c_0.

La gran utilidad de los espacios de Hilbert se debe al hecho de que en ellos los problemas de *"aproximación óptima"* en los que se trata de obtener la mejor aproximación de un elemento $x \in \mathcal{H}$ por elementos de un conjunto $M \subset \mathcal{H}$ tienen una sencilla solución.Se trata, claro está, de calcular un punto $m \in M$ tal que $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$.

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios ℓ_p^N, ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert, y tampoco lo son los espacios c y c_0.

La gran utilidad de los espacios de Hilbert se debe al hecho de que en ellos los problemas de *"aproximación óptima"* en los que se trata de obtener la mejor aproximación de un elemento $x \in \mathcal{H}$ por elementos de un conjunto $M \subset \mathcal{H}$ tienen una sencilla solución.Se trata, claro está, de calcular un punto $m \in M$ tal que $\|x - m\| = \mathrm{dist}(x, M)$.Cuando dicho punto existe y es único se dice que es la **aproximación óptima** de x en M, se dice también que dicho punto $m \in M$ *materializa la distancia* de x a M.

Los espacios normados ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Los espacios ℓ_p^N, ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert, y tampoco lo son los espacios c y c_0.

La gran utilidad de los espacios de Hilbert se debe al hecho de que en ellos los problemas de *"aproximación óptima"* en los que se trata de obtener la mejor aproximación de un elemento $x \in \mathcal{H}$ por elementos de un conjunto $M \subset \mathcal{H}$ tienen una sencilla solución.Se trata, claro está, de calcular un punto $m \in M$ tal que $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$.Cuando dicho punto existe y es único se dice que es la **aproximación óptima** de x en M, se dice también que dicho punto $m \in M$ *materializa la distancia* de x a M.

Teorema de aproximación óptima. Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado un punto $x \in \mathcal{H}$ existe un único punto $\widehat{x} \in C$ tal que

$$\|x - \widehat{x}\| = \operatorname{dist}(x, C) = \text{ínf}\,\{\|x - u\| : u \in C\}$$

Se dice que $\widehat{x}$ es la **proyección** de x sobre C y suele representarse por $\widehat{x} = P_C(x)$.

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

Lema. Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x} \in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

Lema. Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x} \in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:
(a) $\widehat{x}$ es la proyección de x sobre C.

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

Lema. Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x} \in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:
(a) $\widehat{x}$ es la proyección de x sobre C.
(b) $\operatorname{Re}\big(x - \widehat{x} \mid u - \widehat{x}\big) \leqslant 0$ para todo $u \in C$.

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

Lema. Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x} \in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:
(a) $\widehat{x}$ es la proyección de x sobre C.
(b) $\operatorname{Re}\big(x - \widehat{x} \mid u - \widehat{x}\big) \leqslant 0$ para todo $u \in C$.
Si C es de hecho un subespacio, (a) y (b) equivalen a
(c) $(x - \widehat{x} \mid u) = 0$ para todo $u \in C$.

El siguiente resultado caracteriza la proyección sobre un convexo.

Lema. Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x} \in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:
(a) $\widehat{x}$ es la proyección de x sobre C.
(b) $\mathrm{Re}\big(x - \widehat{x} \mid u - \widehat{x}\big) \leqslant 0$ para todo $u \in C$.
Si C es de hecho un subespacio, (a) y (b) equivalen a
(c) $(x - \widehat{x} \mid u) = 0$ para todo $u \in C$.

Corolario. Sea C un conjunto no vacío, cerrado y convexo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $P_C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la proyección sobre C. Entonces se verifica que $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

La condición

$$\mathrm{Re}\big(x - \widehat{x} \mid u - \widehat{x}\big) \leqslant 0 \ \text{ para todo } \ u \in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.

La condición

$$\mathrm{Re}\big(x-\widehat{x}\mid u-\widehat{x}\big)\leqslant 0 \ \text{ para todo } \ u\in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano.

La condición

$$\operatorname{Re}\big(x-\widehat{x}\mid u-\widehat{x}\big)\leqslant 0 \ \text{ para todo } \ u\in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano.De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que para todos x,y, vectores no nulos en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, se verifica que

$$-1\leqslant\frac{\operatorname{Re}(x\mid y)}{\|x\|\|y\|}\leqslant 1$$

La condición

$$\operatorname{Re}\big(x-\widehat{x}\mid u-\widehat{x}\big)\leqslant 0 \ \text{ para todo } \ u\in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano.De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que para todos x,y, vectores no nulos en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, se verifica que

$$-1\leqslant\frac{\operatorname{Re}(x\mid y)}{\|x\|\|y\|}\leqslant 1$$

Por tanto, existe un único número $\vartheta\in[0,\pi]$ tal que

$$\cos\vartheta=\frac{\operatorname{Re}(x\mid y)}{\|x\|\|y\|}$$

La condición

$$\operatorname{Re}\left(x-\widehat{x} \mid u-\widehat{x}\right) \leqslant 0 \text{ para todo } u \in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano.De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que para todos x, y, vectores no nulos en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, se verifica que

$$-1 \leqslant \frac{\operatorname{Re}(x \mid y)}{\|x\|\|y\|} \leqslant 1$$

Por tanto, existe un único número $\vartheta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \vartheta = \frac{\operatorname{Re}(x \mid y)}{\|x\|\|y\|}$$

dicho número ϑ es la medida en radianes del ángulo que forman los vectores x e y.

La condición

$$\operatorname{Re}\big(x-\widehat{x}\mid u-\widehat{x}\big)\leqslant 0 \ \text{ para todo } \ u\in C \tag{8}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica.Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano.De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que para todos x,y, vectores no nulos en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, se verifica que

$$-1\leqslant\frac{\operatorname{Re}(x\mid y)}{\|x\|\|y\|}\leqslant 1$$

Por tanto, existe un único número $\vartheta\in[0,\pi]$ tal que

$$\cos\vartheta=\frac{\operatorname{Re}(x\mid y)}{\|x\|\|y\|}$$

dicho número ϑ es la medida en radianes del ángulo que forman los vectores x e y.Observa que $\cos\vartheta\leqslant 0$ indica que dicho ángulo, medido en grados, está entre 90° y 180°. Por tanto, la condición (8) nos dice que el ángulo que forma el vector $x-\widehat{x}$ con el vector $u-\widehat{x}$ está entre 90° y 180° para todo $u\in C$.

Otra interpretación es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fijados $x_0 \in \mathcal{H} \setminus C$ y $\widehat{x_0} \in C$, el conjunto

$$M = \left\{ x \in \mathcal{H} : (x_0 - \widehat{x_0} \mid x) = (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0}) \right\}$$

es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$.

Otra interpretación es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fijados $x_0 \in \mathcal{H} \setminus C$ y $\widehat{x_0} \in C$, el conjunto

$$M = \left\{ x \in \mathcal{H} : (x_0 - \widehat{x_0} \mid x) = (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0}) \right\}$$

es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$.

Para todo $u \in C$ se tiene que

$$(x_0 - \widehat{x_0} \mid u) \leqslant (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$$

Otra interpretación es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Fijados $x_0 \in \mathcal{H} \setminus C$ y $\widehat{x_0} \in C$, el conjunto

$$M = \left\{x \in \mathcal{H} : (x_0 - \widehat{x_0} \mid x) = (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})\right\}$$

es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$.

Para todo $u \in C$ se tiene que

$$(x_0 - \widehat{x_0} \mid u) \leqslant (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$$

Y también

$$(x_0 - \widehat{x_0} \mid x_0) > (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$$

Otra interpretación es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Fijados $x_0 \in \mathcal{H} \setminus C$ y $\widehat{x_0} \in C$, el conjunto

$$M = \left\{ x \in \mathcal{H} : (x_0 - \widehat{x_0} \mid x) = (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0}) \right\}$$

es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$.

Para todo $u \in C$ se tiene que

$$(x_0 - \widehat{x_0} \mid u) \leqslant (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$$

Y también

$$(x_0 - \widehat{x_0} \mid x_0) > (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$$

Por tanto dicho hiperplano deja a un lado el conjunto C y a otro lado el punto x_0.

Otra interpretación es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Fijados $x_0\in\mathcal{H}\setminus C$ y $\widehat{x_0}\in C$, el conjunto

$$M=\left\{x\in\mathcal{H}:(x_0-\widehat{x_0}\mid x)=(x_0-\widehat{x_0}\mid\widehat{x_0})\right\}$$

es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$.

Para todo $u\in C$ se tiene que

$$(x_0-\widehat{x_0}\mid u)\leqslant(x_0-\widehat{x_0}\mid\widehat{x_0})$$

Y también

$$(x_0-\widehat{x_0}\mid x_0)>(x_0-\widehat{x_0}\mid\widehat{x_0})$$

Por tanto dicho hiperplano deja a un lado el conjunto C y a otro lado el punto x_0.

Observa que si $x,y\in M$ entonces $(x_0-\widehat{x_0}\mid x-y)=0$, es decir, el ángulo de los vectores $x_0-\widehat{x_0}$ y $x-y$ es un ángulo recto. En tal caso se dice que los vectores son ortogonales, concepto que pasamos a definir.

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \quad \forall x \in A\}$$

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \quad \forall x \in A\}$$

Es evidente que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, así como que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ y $A \subset A^{\perp\perp}$, de hecho, $\overline{\mathrm{Lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \quad \forall x \in A\}$$

Es evidente que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, así como que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ y $A \subset A^{\perp\perp}$, de hecho, $\overline{\mathrm{Lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

Teorema de Pitágoras. Sean x, y dos vectores de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{K}$.

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \quad \forall x \in A\}$$

Es evidente que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, así como que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ y $A \subset A^{\perp\perp}$, de hecho, $\overline{\mathrm{Lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

Teorema de Pitágoras. Sean x, y dos vectores de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{K}$.
(a) $x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \quad \forall x \in A\}$$

Es evidente que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, así como que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ y $A \subset A^{\perp\perp}$, de hecho, $\overline{\mathrm{Lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

Teorema de Pitágoras. Sean x, y dos vectores de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{K}$.
(a) $x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces $x \perp y \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la **proyección ortogonal** de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la **proyección ortogonal** de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.
d) $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^\perp} = I - P_M$ donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la **proyección ortogonal** de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.
d) $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^\perp} = I - P_M$ donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Se dice que los espacios M y $M^\perp$ son cada uno el **complemento ortogonal** del otro. Observa que hay una completa simetría y que las proyecciones P_M y $P_{M^\perp}$ son complementarias, esto es $P_M + P_{M^\perp} = I$.

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la **proyección ortogonal** de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.
d) $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^\perp} = I - P_M$ donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Se dice que los espacios M y $M^\perp$ son cada uno el **complemento ortogonal** del otro. Observa que hay una completa simetría y que las proyecciones P_M y $P_{M^\perp}$ son complementarias, esto es $P_M + P_{M^\perp} = I$.
Observa que la igualdad (9) puede expresarse también en la forma

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{10}$$

Teorema de la proyección ortogonal. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:
a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$.
b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^\perp \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la **proyección ortogonal** de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^\perp$.
d) $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^\perp} = I - P_M$ donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Se dice que los espacios M y $M^\perp$ son cada uno el **complemento ortogonal** del otro. Observa que hay una completa simetría y que las proyecciones P_M y $P_{M^\perp}$ son complementarias, esto es $P_M + P_{M^\perp} = I$.
Observa que la igualdad (9) puede expresarse también en la forma

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{10}$$

Y que $\operatorname{dist}(x, M) = \|P_{M^\perp}(x)\|$.

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\mathtt{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^{\perp} = M^{\perp}$ obtenemos lo siguiente.

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\text{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^\perp = M^\perp$ obtenemos lo siguiente.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que contiene al conjunto A, esto es $\overline{\text{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$. En particular, si Y es un subespacio de $\mathcal{H}$ se tiene que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^\perp = M^\perp$ obtenemos lo siguiente.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que contiene al conjunto A, esto es $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$. En particular, si Y es un subespacio de $\mathcal{H}$ se tiene que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

La principal consecuencia del teorema de la proyección ortogonal es la “autodualidad” de los espacios de Hilbert pues, como vamos a ver, un espacio de Hilbert se identifica de una forma natural con su dual.

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^\perp = M^\perp$ obtenemos lo siguiente.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que contiene al conjunto A, esto es $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$. En particular, si Y es un subespacio de $\mathcal{H}$ se tiene que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

La principal consecuencia del teorema de la proyección ortogonal es la "autodualidad" de los espacios de Hilbert pues, como vamos a ver, un espacio de Hilbert se identifica de una forma natural con su dual.

Teorema de Riesz–Fréchet. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ la aplicación que a cada $y \in \mathcal{H}$ hace corresponder el funcional lineal $\psi(y) : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definido por

$$[\psi(y)](x) = (x \mid y) \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\mathrm{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^\perp = M^\perp$ obtenemos lo siguiente.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que contiene al conjunto A, esto es $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$. En particular, si Y es un subespacio de $\mathcal{H}$ se tiene que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

La principal consecuencia del teorema de la proyección ortogonal es la "autodualidad" de los espacios de Hilbert pues, como vamos a ver, un espacio de Hilbert se identifica de una forma natural con su dual.

Teorema de Riesz–Fréchet. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ la aplicación que a cada $y \in \mathcal{H}$ hace corresponder el funcional lineal $\psi(y) : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definido por

$$[\psi(y)](x) = (x \mid y) \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Se verifica que ψ es una biyección conjugado-lineal e isométrica de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}^*$.

$$\psi(\lambda y + z) = \overline{\lambda}\,\psi(y) + \psi(z), \quad (\lambda \in \mathbb{K}, y, z \in \mathcal{H}); \qquad \|\psi(y)\| = \|y\|.$$

Un **sistema ortonormal** en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío $E \subset \mathcal{H}$ cuyos vectores son dos a dos ortogonales y tienen norma 1, esto es, $(x \mid y) = 0$ para todos $x, y \in E$ con $x \neq y$, y $(x \mid x) = 1$ para todo $x \in E$.

Un **sistema ortonormal** en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío $E \subset \mathcal{H}$ cuyos vectores son dos a dos ortogonales y tienen norma 1, esto es, $(x \mid y) = 0$ para todos $x, y \in E$ con $x \neq y$, y $(x \mid x) = 1$ para todo $x \in E$.

Cualquier sistema ortonormal es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Un **sistema ortonormal** en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío $E \subset \mathcal{H}$ cuyos vectores son dos a dos ortogonales y tienen norma 1, esto es, $(x \mid y) = 0$ para todos $x, y \in E$ con $x \neq y$, y $(x \mid x) = 1$ para todo $x \in E$.

Cualquier sistema ortonormal es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Proposición. Sea $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ un sistema ortonormal y $M = \operatorname{Lin}\big(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}\big)$. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k) u_k \tag{11}$$

En consecuencia

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \tag{12}$$

Un **sistema ortonormal** en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío $E \subset \mathcal{H}$ cuyos vectores son dos a dos ortogonales y tienen norma 1, esto es, $(x \mid y) = 0$ para todos $x, y \in E$ con $x \neq y$, y $(x \mid x) = 1$ para todo $x \in E$.

Cualquier sistema ortonormal es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Proposición. Sea $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ un sistema ortonormal y $M = \operatorname{Lin}\big(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}\big)$. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k) u_k \tag{11}$$

En consecuencia

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \tag{12}$$

Método de Gram-Schmidt. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, entonces existe un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{H}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}) = \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$$

En consecuencia $\operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}) = \operatorname{Lin}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Corolario. Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.

Corolario. Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.

Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal E tal que $\mathrm{Lin}(E)$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$.

Corolario. Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.

Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal E tal que $\mathrm{Lin}(E)$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$.

Proposición. Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, admite una base ortonormal numerable.

Corolario. Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.

Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal E tal que $\mathrm{Lin}(E)$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$.

Proposición. Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, admite una base ortonormal numerable.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de vectores ortogonales y $\lambda_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n x_n$ es convergente si, y sólo si, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$ es convergente.

Corolario. Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.

Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal E tal que $\mathrm{Lin}(E)$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$.

Proposición. Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, admite una base ortonormal numerable.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de vectores ortogonales y $\lambda_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} \lambda_n x_n$ es convergente si, y sólo si, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$ es convergente.En cuyo caso, si $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ se verifica que $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$.

Lema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:

Lema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \mathrm{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:

a)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \quad (x \in \mathcal{H})$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \mathrm{dist}(x, M_n)^2 \quad (13)$$

Lema. Sea $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1\leqslant k\leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:

a)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)u_k \quad (x\in\mathcal{H})$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x, M_n)^2 \quad (13)$$

b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente y se verifica que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \quad (x\in\mathcal{H}) \quad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x - P_n(x)\| = \operatorname{dist}(x, M) \quad (15)$$

donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n\in\mathbb{N}\})$.

Lema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \mathrm{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:

a)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \quad (x \in \mathcal{H})$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \mathrm{dist}(x, M_n)^2 \quad (13)$$

b) La serie $\sum_{n \geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente y se verifica que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 + \mathrm{dist}(x, M)^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \quad (14)$$

$$\lim_{n \to \infty} \|x - P_n(x)\| = \mathrm{dist}(x, M) \quad (15)$$

donde $M = \mathrm{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$.En particular, se verifica la **desigualdad de Bessel**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \quad (16)$$

Lema. Sea $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1\leqslant k\leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:

a)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(x \mid u_k)u_k \quad (x\in\mathcal{H})$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x \mid u_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n}(x \mid u_k)u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x,M_n)^2 \quad (13)$$

b) La serie $\sum_{n\geqslant 1}|(x \mid u_n)|^2$ es convergente y se verifica que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x \mid u_n)|^2 + \operatorname{dist}(x,M)^2 \quad (x\in\mathcal{H}) \quad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x - P_n(x)\| = \operatorname{dist}(x,M) \quad (15)$$

donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n\in\mathbb{N}\})$.En particular, se verifica la **desigualdad de Bessel**

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x \mid u_n)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (x\in\mathcal{H}) \quad (16)$$

c) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, la proyección ortogonal sobre el subespacio $\overline{M}$ viene dada por

$$P_{\overline{M}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x \mid u_n)u_n \quad (x\in\mathcal{H}) \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.
- $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$.

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.
- $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \quad (x \in \mathcal{H}).$
- $\|x - P_n x\| \to 0 \quad (x \in \mathcal{H}).$

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.
- $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \quad (x \in \mathcal{H}).$
- $\|x - P_n x\| \to 0 \quad (x \in \mathcal{H}).$
- $\displaystyle x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n) u_n \quad (x \in \mathcal{H}).$

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.
- $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$.
- $\|x - P_n x\| \to 0 \quad (x \in \mathcal{H})$.
- $\displaystyle x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n) u_n \quad (x \in \mathcal{H})$.
- $\displaystyle (x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)(u_n \mid y) \quad (x, y \in \mathcal{H})$.

Proposición.
a) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional, $\mathcal{H}$, es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.

Proposición.
a) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional, $\mathcal{H}$, es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.
b) ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Proposición.
a) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional, $\mathcal{H}$, es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.
b) ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Lema. En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.

Proposición.
a) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional, $\mathcal{H}$, es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.
b) ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Lema. En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.

Teorema. Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal. Concretamente, en un espacio de Hilbert cualquier sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.

Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se definen sus **coeficientes de Fourier** por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{18}$$

Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se definen sus **coeficientes de Fourier** por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{18}$$

La sucesión dada por

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int} \quad (n \in \mathbb{N})$$

se representa simbólicamente por $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int}$ y se llama **serie de Fourier** de f.

Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se definen sus **coeficientes de Fourier** por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{18}$$

La sucesión dada por

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\, e^{int} \quad (n \in \mathbb{N})$$

se representa simbólicamente por $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$ y se llama **serie de Fourier** de f.

Se dice que una **serie trigonométrica** $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{int}$ es una serie de Fourier cuando existe $f \in L_1[-\pi,\pi]$ tal que $\widehat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se definen sus **coeficientes de Fourier** por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{18}$$

La sucesión dada por

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int} \quad (n \in \mathbb{N})$$

se representa simbólicamente por $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int}$ y se llama **serie de Fourier** de f.

Se dice que una **serie trigonométrica** $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{int}$ es una serie de Fourier cuando existe $f \in L_1[-\pi,\pi]$ tal que $\widehat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de unicidad para series de Fourier. Sea $f \in L_1[-\pi,\pi]$ y supongamos que $\widehat{f} = 0$, entonces $f = 0$ casi por doquier.

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (f, g \in L_2[-\pi,\pi])$$

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

y norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \quad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

y norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \quad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ representaremos por $\mathrm{e}_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\mathrm{e}_n(t) = \mathrm{e}^{int} \quad (t \in [-\pi,\pi])$$

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

y norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \qquad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ representaremos por $\mathrm{e}_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\mathrm{e}_n(t) = \mathrm{e}^{int} \qquad (t \in [-\pi,\pi])$$

Se comprueba muy fácilmente que $\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, que recibe el nombre de **sistema trigonométrico**.

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (f,g\in L_2[-\pi,\pi])$$

y norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \qquad (f\in L_2[-\pi,\pi])$$

Para cada $n\in\mathbb{Z}$ representaremos por $\mathrm{e}_n : [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ la función definida por

$$\mathrm{e}_n(t) = \mathrm{e}^{int} \qquad (t\in[-\pi,\pi])$$

Se comprueba muy fácilmente que $\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, que recibe el nombre de **sistema trigonométrico**.

El teorema de unicidad para series de Fourier implica que **el sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$.**

Representaremos por $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ el espacio de Hilbert de las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ tales que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |x(k)|^2 < \infty$$

Representaremos por $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ el espacio de Hilbert de las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ tales que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |x(k)|^2 < \infty$$

con el producto escalar dado por

$$(x \mid y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \quad (x, y \in \ell_2^{\mathbb{Z}})$$

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$, por tanto:

1. **Igualdad de Parseval.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f, g \in L_2[-\pi, \pi])$$

   En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad (f \in L_2[-\pi, \pi])$$

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:

1. **Igualdad de Parseval.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

   En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

2. **Desarrollo de Fourier.** Para $f \in L_2[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge a f en $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,e^{ikt}\right|^2 \mathrm{d}t = 0$$

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:

1. **Igualdad de Parseval.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f,g\in L_2[-\pi,\pi])$$

   En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad (f\in L_2[-\pi,\pi])$$

2. **Desarrollo de Fourier.** Para $f\in L_2[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge a f en $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}\right|^2\mathrm{d}t = 0$$

3. **Teorema de Riesz-Fisher**. Para cada $x\in\ell_2^{\mathbb{Z}}$ existe una única $f\in L_2[-\pi,\pi]$ que verifica que $\widehat{f}(n)=x(n)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:

1. **Igualdad de Parseval.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f,g\in L_2[-\pi,\pi])$$

   En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad (f\in L_2[-\pi,\pi])$$

2. **Desarrollo de Fourier.** Para $f\in L_2[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge a f en $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}\right|^2\mathrm{d}t = 0$$

3. **Teorema de Riesz-Fisher**. Para cada $x\in\ell_2^{\mathbb{Z}}$ existe una única $f\in L_2[-\pi,\pi]$ que verifica que $\widehat{f}(n)=x(n)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Teorema, El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:

1. **Igualdad de Parseval.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \quad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

   En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

2. **Desarrollo de Fourier.** Para $f \in L_2[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge a f en $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}\right|^2\mathrm{d}t = 0$$

3. **Teorema de Riesz-Fisher**. Para cada $x \in \ell_2^{\mathbb{Z}}$ existe una única $f \in L_2[-\pi,\pi]$ que verifica que $\widehat{f}(n) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En suma, la aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ de $L_2[-\pi,\pi]$ en $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}, f \in L_2[-\pi,\pi])$$

es un isomorfismo isométrico de $L_2[-\pi,\pi]$ sobre $\ell_2^{\mathbb{Z}}$.